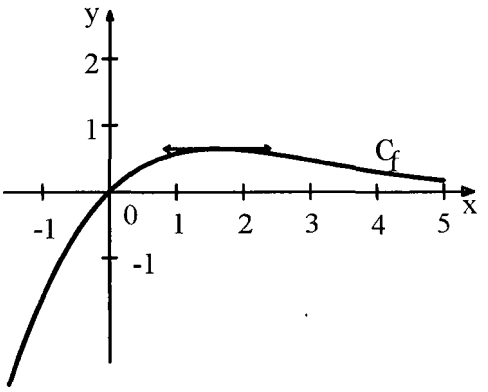
• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{e^x-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x/2}}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\frac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2 = +\infty.$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x-1}\right] = -\infty \Rightarrow C_f$ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.



3)a- f est continue sur tout IR

$\Rightarrow$ elle est continue sur tout intervalle $[0,x]$ avec $x \in IR^+$.

$\Rightarrow \forall x \in IR^+; F(x) = \int_0^x f(t)dt$ existe.

b- $\forall x \in IR^+; F(x) = \int_0^x f(t)dt \overset{th}{\Rightarrow}$ F est la primitive sur IR^+ de f

D'où F est dérivable sur IR^+

$\Rightarrow$ F est continue sur IR^+.

• $\forall x \in IR_+^*; F'(x) = f(x) = \frac{x^2}{e^x-1} > 0$ (car $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 = 1$)

$\Rightarrow$ F est strictement croissante sur $IR^+ = I = [0, +\infty[$.

c- F est continue et strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$

$\overset{th}{\Rightarrow} F([0,+\infty[) = [F(0), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[= [0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$.

4)a- La fonction qui à $t \mapsto t^2e^{-t}$ est continue sur tout IR

donc elle l'est sur tout intervalle de IR de bornes Log2 et x de IR^+

$\Rightarrow \forall x \in IR^+; G(x) = \int_{Log2}^x t^2e^{-t}dt$ existe.